①

数　学

次の各問いに答えよ。Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ の解答欄には答えを導く途中の式も含めて書くこと。

Ⅰ　次の各問いに答えよ。

(1)　不等式 $3(x-a) \leqq -2(x-2)$ を満たす最大の整数が2であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　自然数1から50の中で2，3，5のいずれかで割り切れる数の個数を求めよ。

(3)　15個の値からなるデータがあり，そのうちの10個の値の平均値は6，分散は6，残りの5個の平均値は9，分散は2である。

(i)　このデータの平均値を求めよ。
(ii)　このデータの分散を求めよ。ただし，小数第3位を四捨五入せよ。

(4)　放物線 $y=-2x^2+3x-4$ を次の直線または点に関してそれぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(i)　x 軸
(ii)　y 軸
(iii)　原点

(5)　$x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ とするとき，次の値を求めよ。

(i)　$x+y$
(ii)　xy
(iii)　$3x^2-8xy+3y^2$

②

Ⅱ　最大値が3でそのグラフが2点 $(-3,\ 2)$，$(1,\ 2)$ を通る2次関数を求めよ。

Ⅲ　三角形ABCにおいて次の関係式①があるとき，次の設問に答えよ。

$\sin A \cos A = \sin B \cos B$ …①

(i)　$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とするとき，①を a，b，c で表せ。

(ii)　三角形ABCの形状を調べよ。

Ⅳ　a，b，c，d は正の数で

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{c}+\sqrt{d}$$
$$a+b=c+d$$

であるとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(i)　$ab<cd$ であることを証明せよ。

(ii)　また，このとき $(d-a)(d-b)<0$ であることを示せ。

数　学

Ⅰ	(1)	$2 \leqq a < \frac{11}{3}$	(2)	36	(3) (i)	7	(3) (ii)	6.67
	(4) (i)	$y = 2x^2 - 3x + 4$	(4) (ii)	$y = 2x^2 - 3x - 4$	(4) (iii)	$y = 2x^2 + 3x + 4$		
	(5) (i)	-10	(5) (ii)	1	(5) (iii)	286		

Ⅱ		求める2次関数を $y = a\,(x - p)^2 + 3$ とおく グラフが $(-3, 2)$，$(1, 2)$ を通るから $2 = a\,(-3 - p)^2 + 3$ $2 = a\,(1 - p)^2 + 3$ これを解くと，$a = -\frac{1}{4}$，$p = -1$ よって，求める2次関数は $y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 3$ すなわち，$y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}$

Ⅲ	(i)	三角形 ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$ また余弦定理より $\cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$，$\cos B = \frac{(c^2 + a^2 - b^2)}{2ca}$ よって，関係式①は $\frac{a}{2R} \cdot \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \frac{b}{2R} \cdot \frac{(c^2 + a^2 - b^2)}{2ca}$ これより $(a + b)\,(a - b)\,(c^2 - a^2 - b^2) = 0$	(ii)	(i) より $BC = CA$ の2等辺三角形　または AB が斜辺の直角三角形

Ⅳ	(i)	$\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{c} + \sqrt{d}$ の両辺を2乗すると $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 < (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$ $a + 2\sqrt{ab} + b < c + 2\sqrt{cd} + d$ $a + b + c + b$ より $\sqrt{ab} < \sqrt{cd}$ a, b, c, b は正の数であるから $ab < cb$	(ii)	$(d - a)\,(d - b) = d^2 - bd - ad + ab$ $= d\,(d - b - a) + ab$ $= d\,(d - c - d) + ab$ $= -cd + ab < 0$