

①

数 学

I 次の各問に答えよ。

- (1) 「 $\frac{1}{4-\sqrt{14}}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 a 、 b の値を求めよ。」

という問題に対して、下のような答案を書いたら、減点をされた。
どの部分が減点対象だったのか、番号で答え、減点されない答案に直せ。

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{4-\sqrt{14}} \right] &= \frac{(4+\sqrt{14})}{(4-\sqrt{14})(4+\sqrt{14})} \quad \cdots\text{①} \\ &= \frac{4+\sqrt{14}}{2} \quad \cdots\text{②} \\ &= 2 + \frac{3\cdots}{2} \quad \cdots\text{③} \\ &= 2 + 1.\cdots \quad \cdots\text{④} \end{aligned}$$

よって、整数部分 $a = 3$ で $\cdots\text{⑤}$

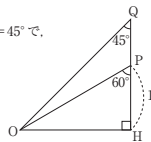
$$\text{小数部分 } b = \frac{4+\sqrt{14}}{2} - 3 = \frac{-2+\sqrt{14}}{2} \text{ となる } \cdots\text{⑥} \quad]$$

- (2) 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c は定数) のグラフについて、次の問に答えよ。

- ① 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を答えよ。
- ② x 軸との交点が2つあるとき、その2点を結ぶ線分の中点の座標を求めよ。
- ③ 頂点の座標を求めよ。

- (3) 図のように、三角定規型の三角形を重ねた図形を考える。
このとき、 $\angle QHO = \angle PHO = 90^\circ$ 、 $\angle OPH = 60^\circ$ 、 $\angle OQH = 45^\circ$ で、
 $PH = 1$ とする。次の問に答えよ。

- ① OP の長さを求めよ。
- ② QP の長さを求めよ。
- ③ $\sin 15^\circ$ の値を求めよ。(途中式も書き)



- (4) ある自然数を2乗すると、一の位の数が6になった。このとき、次の問に答えよ。

- ① この自然数は偶数か奇数か、理由をつけて答えよ。
- ② この自然数の一の位に適する数を、すべて答えよ。
- ③ この自然数を2乗したときの十の位に適する数を、すべて答えよ。

②

- II ある塾で、高校1年生10人の数学Iと数学Aを教えているY先生が、その塾生10人の模擬試験の得点を集計したところ、以下の表のようになった。ただし、模擬試験はどちらも100点満点であった。

科目	塾生1	塾生2	...	塾生10	平均値	標準偏差
数学I	15	75	...	65	50.0	25.0
数学A	70	20	...	65	50.0	15.0

ところが、塾生1と塾生2の生徒の数学Iの得点を誤って逆に入力していたことが判明した。このとき、次の問に答えよ。

- ① 入力ミスを直した後の数学Iの平均値と標準偏差を求めよ。
- ② 偏差値は、右のような計算式で求められる。偏差値 $= 50 + \frac{(\text{自分の得点} - \text{平均})}{\text{標準偏差}} \times 10$
塾生10の数学Iと数学Aの偏差値をそれぞれ求めて、その結果から分かることを述べよ。
- ③ 入力ミスを直した後、数学Iと数学Aの相関係数は大きくなるか、小さくなるか。相関係数の定義を利用して説明せよ。

- III 2^{2000} と 3^{2000} はどちらが大きい数か、理由をつけて答えよ。

- IV $\triangle ABC$ において、 $AB = 1$ 、 $BC = 2$ であるとする。
このとき、 $\angle ACB$ の最大値と、そのときの CA の長さを求めよ。また、その過程も示せ。

- V 白玉と赤玉を1列に並べる。同色の玉は多くても2個までしか連続して並べないとき、次の問に答えよ。

- ① 白玉と赤玉を合計3個並べる方法は何通りあるか。
- ② 白玉と赤玉を合計5個並べる方法は何通りあるか。

I	(1)	減点対象の部分の番号 ③、④ 減点されない答案 $9 < 14 < 16$ より $3 < \sqrt{14} < 4$ だから、 $2 + \frac{3}{2} < 2 + \frac{\sqrt{14}}{2} < 2 + \frac{4}{2}$ となり、 $3.5 < 2 + \frac{\sqrt{14}}{2} < 4$		(2)①	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	(2)②	($\frac{-b}{2a}$, 0)
				(2)③	($\frac{-b}{2a}$, $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$)	(3)①	O P = 2
	(3)②	Q P = $\sqrt{3} - 1$	(3)③	$\angle QOP = \angle QOH - \angle POH = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ で、 $\triangle OPQ$ において、正弦定理を利用すると、 $\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sin 15^\circ}$ で、この式を変形すると、 $2 \times \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$ $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$			
	(4)①	奇数の2乗は奇数になり、偶数の2乗は偶数になる。 問いの数を2乗した数の一の位が6だから、この数は偶数になっている。 したがって、上のことより、この自然数は偶数である。					(4)②
	(4)③	百の位の数は、十の位の計算に影響しないので、十の位と一の位の計算だけで考える。十の位の数をnとすると、 $(10n + 4)^2 = 100n^2 + 10(8n + 1) + 6$ となり、 $8n + 1$ と $3(4n + 1)$ の一の位の数を考えると、1, 3, 5, 7, 9となる。 $(10n + 6)^2 = 100n^2 + 30(4n + 1) + 6$					
II	①	平均値 = 50.0 標準偏差 = 25.0	②	塾生 10 の数学 I の偏差値 = $50 + \frac{65 - 50}{25} \times 10 = 56.0$ 塾生 10 の数学 A の偏差値 = $50 + \frac{65 - 50}{15} \times 10 = 60.0$ この結果から分かること・・・この生徒の数学 I と数学 A の得点は同じであるが、 塾生 10 人の中では、数学 A の方が順位が高い。			
	③	この問いの相関係数は、(数学 I と数学 A の共分散) ÷ {(数学 I の標準偏差) × (数学 A の標準偏差)} で計算できる。 この問いの場合、数学 I 、数学 A の標準偏差に変化はないが、共分散は大きくなるので、相関係数も大きくなる。					
III	$2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$, $3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000}$ であり、 $8 < 9$ だから $8^{1000} < 9^{1000}$ となる。したがって、 3^{2000} の方が大きい数である。						
IV	$\angle ACB$ の最大値 $=30^\circ$ 、そのときのCAの長さ $=\sqrt{3}$ 点Bを中心とする半径1の円を考える。 $\angle ACB$ の最大値は直線ACが上の円に接する場合だから、 $\angle CAB=90^\circ$ のときである。 よって、このとき、 $\triangle ABC$ は、 $AB=1$ 、 $BC=2$ の直角三角形になるので、 $\angle ACB=30^\circ$ で、 $AC=\sqrt{3}$ となる。						
V	①	白玉が2個、赤玉が1個のときが、 ${}_3C_2=3$ 通り で、白玉が1個、 赤玉が2個のときが、 ${}_3C_1=3$ 通り だから、全部で6通りになる。		②	白玉4個、赤玉1個のときは、白・白・赤・白・白の1通り。 白玉1個、赤玉4個のときは、赤・赤・白・赤・赤の1通り。 白玉3個、赤玉2個のときは、 ${}_5C_3-{}_3C_1=7$ 通り。 白玉2個、赤玉3個のときは、 ${}_5C_2-{}_3C_2=7$ 通り。 したがって、全部で16通りになる。		